DETERMINANTES

por Leonardo Sáenz Baez

El objeto de estas notas es el de presentar los determinantes en una forma axiomática y deducir, a partir de los axiomas propuestos, las propiedades fundamentales de ellos.

Consideremos primero el conjunto M de todas las matrices cuadradas de orden n, definidas en un campo *K* (por lo general el campo de los números reales o de los números complejos.)

Cada columna de una matriz cuadrada es una n-ada de elementos del campo, o sea vectores del campo K^n.

Así, la matriz cuadrada de orden n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tiene por columnas los n vectores

$$C_1 = [a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}]$$
$$C_2 = [a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}]$$

$$C_n = [a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn}]$$

Con esta notación la matriz A se puede escribir

$$A = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

Por ejemplo, la matriz unitaria

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

La podemos escribir

$$I = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

donde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ son los vectores

$$e_1 = [1,0, \ldots,0]$$
$$e_2 = [0,1, \ldots,0]$$

$$e_n = [0,0,\ldots,1]$$

Los cuales forman la base usual de K^n.

DEFINICIÓN Y AXIOMAS DE LOS DETERMINANTES

DEFINICIÓN
Una función D, de la forma D: $M \rightarrow K$, que asocie a cada matriz cuadrad $A \in M$ un solo valor $D(A) \in K$, es llamada "Determinante de orden n", si y sólo si tiene las siguientes propiedades:

A_1)

$$D(C_1, \ldots, \lambda C_i, \ldots, C_n) = \lambda D(C_1, \ldots, C_n)$$

para cualquier λ en K.

A_2)

$$D(C_1, \ldots, C_i + C_j, \ldots, C_n) = \lambda D(C_1, \ldots, C_n)$$

para $i \neq j$.

El valor de un determinante no se altera si a la i-ésima columna se le agrega la j-ésima columna, $i \neq j$.

A_3)

$$D(I) = D(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$$

El valor del determinante asociado a la matriz unitaria es igual a 1.

TEOREMAS INMEDIATOS

A continuación daremos una serie de teoremas que nos indican propiedad es fundamentales de los determinantes.

TEOREMA 1

$$D(C_1, \ldots, C_i + \lambda C_j, \ldots, C_n) = D(C_1, \ldots, C_n)$$

Si una columna se le suma un múltiplo de otra columna, el valor del determinante no se altera.

Demostración. Aquí obviamente $\lambda \neq 0$.
Por axioma A_1) tenemos

$$D(C_1, \ldots, C_n) = \frac{1}{\lambda} D(C_1, \ldots, \lambda C_j, \ldots, C_n)$$

Ahora para el determinante $D(C_1, \ldots, + \lambda\, C_i, \ldots, C_n)$ podemos, de acuerdo al axioma A_2), sumando a la columna C_i la columna λC_j, escribir

$$D(C_1, \ldots, C_i + \lambda C_j, \ldots, C_n) = D(C_1, \ldots, \lambda C_j, \ldots, C_n)$$

De modo que

$$D(C_1, \ldots, C_n) = \frac{1}{\lambda} D(C_1, \ldots, \lambda C_i, \ldots, C_n)$$

$$= \frac{1}{\lambda} D(C_1, \ldots, C_i + \lambda C_j, \ldots, \lambda C_j, \ldots, C_n)$$

y nuevamente por axioma A_1), sacando el escalar λ de la j – ésima columna, tendremos

$$D(C_1, \ldots, C_n) = \frac{1}{\lambda} \lambda\, D(C_1, \ldots, C_i + \lambda C_j, \ldots, \lambda C_j, \ldots, C_n)$$

$$= D(C_1, \ldots, C_i + \lambda C_j, \ldots, C_n)$$

O sea

$D(C_1, \ldots, C_i + \lambda C_j, \ldots, C_n) = D(C_1, \ldots, C_n)$ //

Nota: la doble diagonal // indica fin de la demostración.

TEOREMA 2

$$D(C_1,...,C_i + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k C_k,...,C_n) = D(C_1,...,C_n)$$

con $k \neq i$.

Si a una columna se le suma una combinación lineal de otras columnas, el valor del determinante no se altera.

Este teorema es una generalización del anterior y la demostración se hace por inducción.

Demostración.

El teorema se cumple para n = 1, según el resultado del Teorema anterior.
Supongamos ahora que se cumple para n = r, o sea

$$D(C1,...,C_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k C_k,...,C_n) = D(C_1,...,C_n)$$

Entonces demostraremos que se cumple para n = r + 1. En efecto

$$D(C_1,...,C_i + \sum_{k=1}^{r+1} \lambda_k C_k,..,C_n$$

$$= D(C_1,...,C_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k C_k + \lambda_{r+1} C_{r+1},...,C_n)$$

$$= D(C_1,...,C_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k C_k,..,C_n) \quad \text{por el Teorema 1. r +1} \neq i$$

$$= D(C_1,...,C_n) \quad \text{por hipótesis de inducción}$$

esto es

$$D(C_1,...,C_i+\sum_{k=1}^{r+1}\lambda_k C_k,...,C_n)=D(C_1,...,C_n)$$

con $k \neq 1$.

Con esto se demuestra que el Teorema se cumple para toda n. □

TEOREMA 3

$$D(C_1,...,\bar{0},...,C_n)=0$$

Si alguno de los vectores columna es el vector cero $\bar{0}$ = (0, …, 0), entonces el determinante vale cero.

Demostración. Sea $C_i = \bar{0}$, donde 0 es el cero de K y $\bar{0}$ es el vector cero, por lo tanto

$$\begin{aligned} &D(C_1,...,C_i,...,C_n)=D(C_1,...,0.C_i,...,C_n) \\ &=0.D(C_1,...,C_i,...,C_n)=0. \end{aligned}$$

TEOREMA 4

Si los vectores columna $C_1,\ldots, C_2$ son linealmente dependiente entonces $D(C_1,\ldots, C_n)$ El teorema también se puede enunciar diciendo su contrapositivo: Si $D(C_1,\ldots, C_n) \neq 0$, entonces los vectores $C_1,..$, C_n son linealmente independientes.

Demostración. Por hipótesis $C_1, \ldots, C_n$ son linealmente independientes, esto implica que existen elementos $\lambda_1,\ldots, \lambda_n$ en *K*, no todos son nulos, tales que

$$\lambda_1 C_1+...+\lambda_n C_n=\bar{0}$$

Consideremos $\lambda_i \neq 0$, entonces

$$C_i=-\frac{\lambda_i}{\lambda_i}C_1-...-\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}C_{i-1}-\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}C_{i+1}-...-\frac{\lambda_{n1}}{\lambda_i}C_n$$

o sea

$$C_i \neq \sum_{k=1}^{n} \mu_k C_k = \bar{0} \quad con \quad \mu_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_i}, \quad i \neq k.$$

y según el teorema 2) y 3) podemos escribir

$$\begin{aligned} D(C_1,...C_n) &= D(C_1,...C_i + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \mu_k C_k,...,C_n) \\ &= \quad D(C_1,..,\bar{0},...,C_n) \\ & D(C_1,...,C_n) = 0. \end{aligned}$$

TEOREMA 5 Si se intercambian dos columnas de las C_1, …,C_n, dejando fijas las demás entonces el valor del determinante cambia de signo. O sea

$$D(C_1,...,\overset{i}{C_i},...,\overset{j}{C_j},...,C_n) = -D/(C_1,...,\overset{i}{C_i},...,\overset{j}{C_j},...,C_n)$$

Demostración.

En la presente notación las letras i y j, colocadas a la cabeza de las columnas indican la posición original de las columnas C_i y de C_j, respectivamente. En la demostración emplearemos únicamente los axiomas A_1) y A_2).

En efecto :

En este caso cualquier vector columna C’, los conjuntos de vectores

(C_1 + C’, C_2,…, C_n) y (C’, C_2,…, C_n)

Sigue siendo linealmente dependientes, y de acuerdo al Teorema 4) tendremos

$$\begin{aligned} & D(C_1 + C', C_2,...,C_n) = 0 \\ & D(C_1, C_2,...,C_n) = 0 \\ & y \quad D(C', C_2,...,C_n) = 0 \quad y \quad por \quad lo \quad \tan to \\ & D(C_1 + C',...,C_n) = D(C_1 + C',...,C_n) = D(C_1,...,C_n) + D(C',...,C_n) \end{aligned}$$

Caso 2. Las columnas C_2,…, C_n son vectores linealmente dependientes. Puesto que C_2, …, C_n son (n – 1) vectores de K_n, entonces existe un vector C en K_n talque {C,C_2,…,C_n} forman una base para dicho espacio y por lo tanto

$$\begin{aligned} & C_1 = \lambda_1 C + \lambda_2 C_2 + ... + \lambda_n C_n \\ & C' = \mu_1 C + \mu_2 C_2 + ... + \mu_n C_n \\ & C_1 + C' = (\lambda_1 + \mu_1)C + (\lambda_2 + \mu_2)C_2 + ... + (\lambda_n + \mu_n)C_n \end{aligned}$$

De manera que

$$
\begin{aligned}
&C_1 - \sum\nolimits_{k=2}^{n} \lambda_k C_k = \lambda_1 C \\
&C' - \sum\nolimits_{k=2}^{n} \mu_k C_k = \mu_1 C \qquad y \\
&C_1 + C' - \sum\nolimits_{k=2}^{n} (\lambda_k - \mu_k) C_k = (\lambda_k - \mu_k) C
\end{aligned}
$$

Y si empleamos el Teorema 2) y axioma A_1) tendremos

i)

$$
\begin{aligned}
D(C_1,\dots,C_n) &= D(C_1 - \sum\nolimits_{k=2}^{n} \lambda_k C_k,\dots,C_n \\
&= D(\lambda_1 C,\dots,C_n) = \lambda_1 D(C,\dots,C_n)
\end{aligned}
$$

ii)

$$
\begin{aligned}
D(C',\dots,C_n) &= D(C' - \sum\nolimits_{k=2}^{n} \mu_k C_k,\dots,C_n \\
&= D(\mu_1 C,\dots,C_n) = \mu_1 D(C,\dots,C_n)
\end{aligned}
$$

además

$$
\begin{aligned}
&D(C_1 + C',\dots,C_n) = D(C_1 + C' - \sum\nolimits_{k=2}^{n} (\lambda_k + \mu_k) C_k,\dots,C_n) \\
&= D((\lambda_1 + \mu_1) C,\dots,C_n) = (\lambda_1 + \mu_1) D(C,\dots,C_n) \\
&= \lambda_1 D(C,\dots,C_n) + \mu_1 D(C,\dots C_n)
\end{aligned}
$$

Esto último empleando i) y ii). $\square$

$$
\begin{aligned}
&D(C_1,\dots,\overset{i}{C_i},\dots,\overset{j}{C_j},\dots,C_n) = D(C_1,\dots,-\overset{i}{C_i},\dots,\overset{j}{C_j},\dots,C_n) \\
&= -D(C_1,\dots,-\overset{i}{C_i},\dots,\overset{j}{C_j - C_i},\dots,C_n) = D(C_1,\dots,\overset{i}{C_i},\dots,\overset{j}{C_i - C_j},\dots,C_n) \\
&= D(C_1,\dots,-C_i + \overset{i}{C_i - C_j},\dots,\overset{j}{C_i - C_j},\dots,C_n) = D(C_1,\dots,-\overset{i}{C_j},\dots,\overset{j}{C_i - C_j},\dots,C_n) \\
&= -D(C_1,\dots,-\overset{i}{C_j},\dots,\overset{j}{C_j - C_i},\dots,C_n) = -D(C_1,\dots,-\overset{i}{C_j},\dots,C_j - \overset{i}{C_i} - C_j,\dots,C_n) \\
&= -D(C_1,\dots,-\overset{i}{C_j},\dots,-\overset{j}{C_i},\dots,C_n) = D(C_1,\dots,\overset{i}{C_j},\dots,-\overset{j}{C_i},\dots,C_n) \\
&= -D(C_1,\dots,\overset{i}{C_j},\dots,\overset{j}{C_i},\dots,C_n)
\end{aligned}
$$

$\square$

Colorario Si dos columnas digamos C_i y C_j, $i \neq j$, son iguales, entonces el valor del determinantes es cero.

Demostración

Si intercambiamos la columna C_i con la columna C_j, el determinante cambia de signo, pero como $C_i = C_j$, entonces el determinante seguirá siendo el mismo y tendremos

$D(C_1,\ldots, C_n) = -D(C_1,\ldots, C_n)$

y esto sólo se cumple si $D(C_1,\ldots, C_n) = 0$. //

TEOREMA 6 Sea C’ cualquier vector columna de K^n, entonces

$D(C_1 + C’,\ldots, C_n) = D(C_1,\ldots,C_n) + D(C’,\ldots,C_n)$

Este teorema nos indica que la función D es lineal para la primera componente, similarmente se puede demostrar la linealidad de cualquier otra componente, o sea:

$$D(C_1,\ldots,\overset{i}{C_i + C'},\ldots,C_n) = D(C_1,\ldots,\overset{i}{C_i},\ldots,C_n) + D(C_1,\ldots,\overset{i}{C'},\ldots,C_n)$$

Demostración

Para la demostración consideremos dos casos:
Caso 1. Las columnas $C_2,\ldots, C_n$ son vectores linealmente dependientes.

En este caso, para cualquier vector columna C’, los conjuntos de vectores $\{C_1+C’,C_2, \ldots ,C_n\}$ y $\{C’, C_2, \ldots, Cn\}$, siguen siendo linealmente dependientes y por lo tanto, de acuerdo al Teorema 4., tendremos

$D(C_1+C’, C_2, \ldots , C_n) = 0$
$D(C_1, \ldots, C_n) = 0$
$D(C’, \ldots , C_n) = 0$, y por lo tanto

$D(C_1+C’, C_2, \ldots , C_n) = D(C_1, \ldots, C_n) + D(C’, \ldots , C_n)$.

Caso 2. Las columnas $C_2, \ldots , C_n$ son vectores linealmente independientes.

Puesto que $C_2, \ldots , C_n$ son $(n – 1)$ vectores de K^n, entonces existe un vector C de K^n tal que $\{C, C_2, \ldots , C_n \}$ forman una base para dicho espacio y por lo tanto

$$C_1 = \lambda_1 C + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_n C_n$$
$$C' = \mu_1 C + \mu_2 C_2 + \cdots + \mu_n C_n$$
$$C_1 + C' = (\lambda_1 + \mu_1)C + (\lambda_2 + \mu_2)C_2 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n)C_n$$

de manera que

$$C_1 - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k C_k = \lambda_1 C$$

$$C' - \sum_{k=2}^{n} \mu_k C_k = \mu_1 C \qquad y$$

$$C_1 + C' - \sum_{k=2}^{n} (\lambda_k + \mu_k) C_k = (\lambda_1 + \mu_1) C$$

y si empleamos el Teorema 2 y Axioma A_1 tendremos

i) $D(C_1, \ldots, C_n) = D(C_1 - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k C_k, \ldots, C_n)$
$= D(\lambda_1 C, \ldots, C_n) = \lambda_1 D(C, \ldots, C_n)$

ii) $D(C', \ldots, C_n) = D(C' - \sum_{k=2}^{n} \mu_k C_k, \ldots, C_n)$
$= D(\mu_1 C, \ldots, C_n) = \mu_1 D(C, \ldots, C_n)$

además

$$\begin{aligned}
D(C_1 + C', \ldots, C_n) &= D(C_1 + C' - \sum_{k=2}^{n} (\lambda_k + \mu_k) C_k, \ldots, C_n) \\
&= D((\lambda_1 + \mu_1) C, \ldots, C_n) \\
&= (\lambda_1 + \mu_1) D(C, \ldots, C_n) \\
&= \lambda_1 D(C, \ldots, C_n) + \mu_1 D(C, \ldots, C_n) \\
&= D(C_1, \ldots, C_n) + D(C', \ldots, C_n)
\end{aligned}$$

esto último empleando i) y ii) //

Empleando inducción matemática se puede demostrar que

$$\begin{aligned}
&D(S_1 + S_2 + \cdots + S_r, C_2, \ldots, C_n) \\
&= D(S_1, C_2, \ldots, C_n) + D\left(S_2, C_2, \ldots, C_n\right) + \cdots + D(S_r, C_2, \ldots, C_n)
\end{aligned}$$

o empleando sumatorias

$$D(\sum_{k=1}^{r} S_k, C_2, \ldots, C_n) = \sum_{k=1}^{r} D(S_k, C_2, \ldots, C_n)$$

la demostración es sencilla y se deja como ejercicio al lector.

Teorema 7.

Si las columnas $C_1,\dots,C_n$ son linealmente independientes, entonces $D(C_1,\dots,C_n)\neq 0$

Demostración.

Por ser $\{C_1,\dots,C_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes de K^n, entonces forman una base de este espacio, de manera que podemos escribir los vectores $e_1, e_2, \dots, e_n$ de la base usual, como combinaciones lineales de los vectores $C_1,\dots,C_n$, esto es:

$$e_1 = a_{11}C_1 + a_{12}C_2 + \cdots + a_{1n}C_{1n} = \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1}C_{j_1}$$

$$e_2 = a_{21}C_1 + a_{22}C_2 + \cdots + a_{2n}C_n = \sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2}C_{j_2}$$

. . . .

$$e_n = a_{n1}C_1 + a_{n2}C_2 + \cdots + a_{nn}C_n = \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n}C_{j_n}$$

y de acuerdo al axioma A_3, tendremos:

$$1 = D(e_1,\dots,e_n) = D\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1}C_{j_1},\dots,\sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n}C_{j_n}\right)$$

ahora aplicando sucesivamente el Teorema 6, conjuntamente con el axioma A_1, tendremos:

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} D\left(C_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2}C_{j_2} \dots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n}C_{j_n}\right)\\
&= \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n} a_{1j_1}a_{2j_2} D\left(C_{j_1}, C_{j_2},\dots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n}C_{j_n}\right)\\
&= \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} D(C_{j_1}, C_{j_2},\dots, C_{j_n})
\end{aligned}$$

o en forma más compacta

$$1 = \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} D(C_{j_1}, C_{j_2},\dots, C_{j_n})$$

aquí, cada uno de los índices $j_1, j_2, \dots, j_n$ recorre los valores de 1 a n independientemente.

Habrá, obviamente, sumandos en los cuales $j_k = j_r$ y en estos casos el determinante el determinante $D(C_{j_1},\ldots,C_{j_n})$ tendrá dos columnas iguales y por lo tanto el valor será cero, luego entonces en la sumatoria quedarán solamente aquellos sumandos para los cuales $j_1, j_2, \ldots, j_n$ son todos diferentes, o sea que $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ será una permutación de los números $(1, 2, \ldots, n)$ por lo cual tendremos:

$$1=\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}D(C_{j_1},C_{j_2},\ldots,C_{j_n}) \qquad (\mathrm{I})$$

con $j_1, j_2, \ldots, j_n$ diferentes todos ellos.

Aplicando sucesivamente el teorema 5, es posible escribir:

$$D(C_{j_1},\ldots,C_{j_n})=\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2\ldots & n\\ j_1 & j_2\ldots & j_n\end{pmatrix}D(C_1,\ldots,C_n)=\pm D(C_1,\ldots,C_n)$$

Donde sgn(…) es una función cuyo valor es +1 si $\begin{pmatrix}1 & 2\ldots & n\\ j_1 & j_2\ldots & j_n\end{pmatrix}$ es una permutación par y es -1, si la permutación es impar.

Entonces si (I) lo escribimos

$$1=\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2\ldots & n\\ j_1 & j_2\ldots & j_n\end{pmatrix}D(C_1,\ldots,C_n)$$

Podemos sacar de factor común a $D(C_1,\ldots,C_n)$, obteniendo

$$1=\Big(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n}\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2\ldots & n\\ j_1 & j_2\ldots & j_n\end{pmatrix}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\Big)D(C_1,\ldots,C_n)$$

Y esto último implica, obviamente, que $D(C_1,\ldots,C_n)\neq 0$

Con lo cual queda demostrado que si $C_1, \ldots, C_n$ son vectores columna linealmente independientes, entonces $D(C_1,\ldots,C_n)\neq 0$.

Los Teoremas 7 y 4, se pueden enunciar en uno solo diciendo:

Teorema 8.

Las columnas $C_1, \ldots, C_n$ son linealmente independientes sí y sólo sí $D(C_1,\ldots,C_n)\neq 0$.

REGLA DE CRAMER.

El procedimiento que expondremos a continuación, para obtener el valor de las incógnitas en un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas, se conoce con el nombre de "Regla de Cramer".

Consideremos el sistema S de n ecuaciones con n incógnitas.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Este sistema se puede escribir

$$C_1x_1 + \cdots + C_nx_n = B$$

donde

$C_1 = [a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}]$
$C_2 = [a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}]$

$C_n = [a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn}]$
$B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$

son vectores columna de K^n.

Teorema 9.

Si $D(C_1, \ldots, C_n) \neq 0$, entonces la incógnita $x_i; i = 1, \ldots, n$, está dada por:

$$x_i = \frac{D(C_1, \ldots, \overset{i}{B}, \ldots, C_n)}{D(C_1, \ldots, C_n)}$$

Donde la columna B está colocada en lugar de la i-ésima columna C_i

En la notación usual tendríamos

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \overset{i}{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Donde el numerador se obtiene al sustituir, en el determinante del sistema, la i-ésima columna por la columna de términos independientes B y el denominador es el determinante del sistema.

Demostración.

Para el sistema $C_1x_1 + \cdots + C_nx_n = B$, consideremos el determinante que se obtiene al sustituir la i-ésima columna C_i por la columna B de términos independientes, esto es:

$$D(C_1, \ldots, \overset{i}{B}, \ldots, C_n) = D(C_1, \ldots, C_1x_1 + \overset{i}{\cdots} + C_nx_n, \ldots, C_n)$$

Ahora, empleando el Teorema 6 varias veces, tendremos

$$\begin{aligned} D(C_1, \ldots, \overset{i}{B}, \ldots, C_n) &= D(C_1, \ldots, \overset{i}{C_1}x_1, \ldots, C_n) \\ &+ D(C_1, \ldots, \overset{i}{C_2}x_2, \ldots, C_n) \\ &\cdots \\ &+ D(C_1, \ldots, \overset{i}{C_i}x_i, \ldots, C_n) \\ &\cdots \\ &+ D(C_1, \ldots, \overset{i}{C_n}x_n, \ldots, C_n) \end{aligned}$$

Y empleando el Axioma A_1 tendremos

$$
\begin{aligned}
D(C_1,\ldots,\overset{i}{B},\ldots,C_n) = {} & x_1 D(C_1,\ldots,\overset{i}{C_1},\ldots,C_n) \\
& + x_2 D(C_1,\ldots,\overset{i}{C_2},\ldots,C_n) \\
& \qquad \cdots \\
& + x_i D(C_1,\ldots,\overset{i}{C_i},\ldots,C_n) \\
& \qquad \cdots \\
& + x_n D(C_1,\ldots,\overset{i}{C_n},\ldots,C_n)
\end{aligned}
$$

Notando que cada sumando, excepto el i-ésimo, contiene un determinante con dos columnas iguales y por lo tanto, todos los sumandos, excepto el i-ésimo, se anulan, de manera que

$$
D(C_1,\ldots,\overset{i}{B},\ldots,C_n) = x_i D(C_1,\ldots,\overset{i}{C_i},\ldots,C_n)
$$

Y por lo tanto

$$
x_i = \frac{D(C_1,\ldots,\overset{i}{B},\ldots,C_n)}{D(C_1,\ldots,C_n)} \quad //
$$